1763

Constructio aequationis differentio-differentialis $Ay\, du^2 + (B+Cu)du\, dy + (D+Eu+Fuu)ddy = 0$, sumto elemento *du* constante

Leonhard Euler

CONSTRVCTIO
AEQVATIONIS DIFFERENTIO-DIFFERENTIALIS
$Aydu^2 + (B + Cududy + (D + Eu + Fuu)ddy) = 0$,
sumto elemento du constante.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Aequationem hanc differentio-differentialem latissime patere, ex plurimis formis, in quas eam transmutare licet, facile intelligitur; plerumque autem eiusmodi complectitur casus, qui, cum sint aequationi *Riccatianae* similes, solitis methodis neque ad integrationem, neque ad variabilium separationem reduci possunt. Primo enim, ponendo $y = e^{\int z\, du}$, reuocatur ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$dz + \frac{(B - Cu)z\,du}{D + Eu + Fuu} + zz\,du + \frac{A\,du}{D + Eu + Fuu} = 0,$$

quae deinceps ad alias substitutiones amplissimum campum patefacit. Quam ob rem non parum Analysi consultum fore arbitror, si in genere istius aequationis constructionem docuero, id quod per ea, quae olim de aequatione *Riccatiana* proposui, sequentem in modum praestari poterit.

2. Concipio autem y determinari formula quapiam integrali praeter quantitatem u nouam variabilem x inuoluente, ita vt in hac integratione sola x, vt variabilis,

riabilis, quantitas u vero vt constans, tractetur. Cum autem integratio, siue analytice, siue per constructionem quadraturarum, fuerit absoluta, quantitati x valor quidam constans datus tribuitur, quo facto integrale repraesentabit functionem quandam ipsius u, quae sit ea ipsa, quam aequatio proposita exigit. Totum ergo negotium huc redit, vt formula illa integralis quantitates u et x inuoluens inueniatur, quae hoc modo tractata verum valorem ipsius y exhibeat.

3. Ponamus ergo esse $y = \int P dx (u + x)^n$, in qua formula P denotet functionem quandam ipsius x ab u immunem, quam quidem demum definiri oportet. Quae cum fuerit cognita, integrale saltem per quadraturas concedetur, idque pro quocunque valore ipsius u, quae in integratione vt constans spectatur. Tum integrali ita sumto, vt pro quopiam valore ipsi x tributo euanescat, statuatur pro x alius quispiam valor definitus et constans, ab u scilicet non pendens; quo facto aequabitur y functioni cuipiam determinatae ipsius u, quae sit ea ipsa, qua aequatio proposita resoluitur.

4. Etsi autem in integratione $\int P dx (u + x)^n$ quantitas u pro constante habetur, tamen eius incrementum assignari potest, quod capit, si pro u statuatur $u + du$, et integratio simili modo absoluatur. Ex principiis autem alibi expositis colligitur hoc incrementum $= n du \int P dx (u + x)^{n-1}$. Quare si haec formula eodem modo tractetur, ipsique x post integrationem valor determinatus tribuatur, cum fuerit $y = \int P dx (u + x)^n$ erit nunc, quatenus variato u simul y variationem subit, $dy = n du \int P dx (u + x)^{n-1}$. Ac si porro simili modo

modo differentiale ex variatione ipſius u ortum colligamus, ob du conſtans conſequemur:

$$ddy = n(n-1)du^2 \int P dx(u+x)^{n-2}.$$

5. Cum igitur his integralibus modo praeſcripto ita ſumtis, vt ipſi x valor quidam determinatus tribuatur, ſicque ea in meras functiones ipſius u abeant, habeamus hos valores:

$$y = \int P dx(u+x)^n; \quad \frac{dy}{du} = n\int P dx(u+x)^{n-1}$$

$$\text{et } \frac{ddy}{du^2} = n(n-1)\int P dx(u+x)^{n-2}$$

neceſſe eſt, vt vi aequationis propoſitae ſit

$$A\int P dx(u+x)^n + n(B+Cu)\int P dx(u+x)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)(D+Eu+Fuu)\int P dx(u+x)^{n-2} = 0$$

in quibus integralibus ſola x vt variabilis ſpectatur, u vero pro conſtante habetur. Haec autem aequatio tum ſolum locum habere debet, cum poſt ſingulas integrationes quantitati x valor ille determinatus ab u non pendens fuerit tributus.

6. In genere autem, antequam ipſi x iſte valor aſſignatur, iſta quantitas non euaneſcet, ſed potius cuipiam quantitati ex u et x compoſitae aequabitur, quae autem ita comparata eſſe debet, vt illo caſu, quo pro x valor ille determinatus ſcribatur, euaneſcat. Sit igitur $R(u+x)^{n-1}$ ea quantitas indefinita, cui ſuperior forma in genere aequetur, vbi R ſit eiusmodi functio ipſius x, quae tam pro eo valore ipſius x, quo integralia ſingula euaneſcentia redduntur, quam pro eo, qui ipſi poſt integrationes tribuitur, in nihilum abeat. Quos valores ex ipſa indole huius functiones R colligi

colligi conuenit, haecque etiam eſt cauſa, cur eos non ſtatim determinauerim.

7. Quamdiu ergo x adhuc eſt variabilis, et u vt conſtans ſpectatur, neceſſe eſt, vt expreſſio $R(u+x)^{n-1}$ aequetur huic formulae integrali:

$$\int P dx (u+x)^{n-2} \left(\begin{array}{lll} +Auu & +2Aux & +Axx \\ +nCuu & +nCux & +nBx \\ & +nBu & +n(n-1)D \\ +n(n-1)Euu & +n(n-1)Eu & \end{array} \right),$$

cuius propterea differentiale aequari oportet huic:

$$(u+x)^{n-2} \left(\begin{array}{l} u\,dR + x\,dR \\ \qquad + (n-1) R\,dx \end{array} \right)$$

Quia autem R ab u pendere non debet, conditiones ſatisfacientes his aequationibus continentur:

$$A + nC + n(n-1)F = 0$$

$$dR = (2A + nC) P x\,dx + n(B + (n-1)E) P\,dx$$

$$x\,dR + (n-1) R\,dx = APxx\,dx + nBPx\,dx + n(n-1) DP\,dx.$$

8. Si valor ipſius dR ex ſecunda in tertia ſubſtituatur, habebitur:

$$(n-1)R = -(A+nC)Pxx - n(n-1)EPx + n(n-1)DP$$

et quia ex prima eſt $-A - nC = n(n-1)F$, prodit

$$R = nP(Fxx - Ex + D).$$

Deinde ob $2A + nC = -2n(n-1)F - nC$ ſecunda induit hanc formam:

$$dR = nP dx(-(C + 2(n-1)F)x + B + (n-1)E)$$

quae per illam diuiſa dat:

$$\frac{dR}{R} = \frac{-(C + 2(n-1)F)x\,dx + (B + (n-1)E)dx}{Fxx - Ex + D}$$

 vnde

vnde, cum R fuerit inuentum, erit

$$P\,dx = \frac{R\,dx}{x(Fxx - Ex + D)},$$

exponens autem n per primam aequationem definitur vnde fit $n = \frac{E - C + \sqrt{((E-C)^2 - 4AF)}}{2F}$.

9. Hic plures casus perpendendi occurrunt, ac primo quidem ratione exponentis n, si is prodierit imaginarius, puta $n = \mu + \nu\sqrt{-1}$, notandum est, esse $r^{\sqrt{-1}} = \operatorname{cos.} lr + \sqrt{-1}.\ \operatorname{sin.} lr$, ideoque $r^n = r^\mu(\operatorname{cos.} \nu lr + \sqrt{-1}.\ \operatorname{sin.} \nu lr)$, vnde imaginarium exponentis ope sinuum ad imaginaria simplicia reducitur, ex quibus deinceps eorum destructio mutua facilius perficietur. Deinde inuestigatio functionis R huc redigitur, vt sit

$$lR = -(n-1)\,l(Fxx - Ex + D) - \int \frac{Cx\,dx - B\,dx}{Fxx - Ex + D}$$

quae denuo ad hanc formam perducitur:

$$lR = -\left(n - 1 + \frac{C}{2F}\right) l(Fxx - Ex + D) + \left(B - \frac{CE}{2F}\right)\int \frac{dx}{Fxx - Ex + D}.$$

Nisi ergo sit $B - \frac{CE}{2F} = 0$, videndum est, an formulae integrandae denominator $Fxx - Ex + D$ habeat duos factores simplices reales et inaequales, an vero aequales? tum vero an in huiusmodi factores sit irresolubilis? praeterea casus, quo $F = 0$ peculiarem euolutionem postulat, quos diuersos casus seorsim pertractabo.

I. Casus quo $B = \frac{CE}{2F}$.

10. Aequatio ergo resoluenda erit

$$Ay + \frac{C}{2F}(E + 2Fu)\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fuu)\frac{ddy}{du^2} = 0$$

pro qua si sumamus $y = \int P\,dx\,(u + x)^n$, habemus primo

$$n = \frac{E - C + \sqrt{((E-C)^2 - 4AF)}}{2F},$$ tum vero

R =

$$R = (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}, \text{ hincque}$$

$$P\,dx = \tfrac{1}{n}\,dx(D - Ex + Fxx)^{-n-\frac{C}{2F}}, \text{ ita vt fit}$$

$$y = \tfrac{1}{n}\int \frac{dx(u+x)^n}{(D - Ex + Fxx)^{+n+\frac{C}{2F}}}$$

quod integrale eiusmodi terminis ipſius x comprehendi debet, quibus quantitas $(u+x)^{n-1}(D-Ex+Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$ euaneſcat.

11. Quoties ergo formula $D - Ex + Fxx$ duos factores habet reales, ea duplici caſu euaneſcit, vnde bini integrationis termini conſtitui poſſunt; ad hoc autem neceſſe eſt, vt eius exponens $-n + 1 - \frac{C}{2F}$, qui fit $= \frac{F \mp \sqrt{((F-C)^2 - 4AF)}}{2F}$, ſit poſitiuus, quia alioquin quantitas illa, cui formula propoſita aequalis ſtatuitur, non in nihilum abiret. Hoc igitur caſu conſtructio aequationis nullam habebit difficultatem, propterea quod ob ſignum ambiguum exponenti ſemper valor poſitiuus tribui poteſt. Sit enim exponens ille $= m$, et habebitur

$$4FFmm - 4FFm + 4AF + 2CF - CC = 0$$

quae aequatio ſi habet radices reales, ob terminum $-4FFm$ negatiuum, altera certe erit poſitiua. Quem caſum diligenter proſequamur.

12. Sit $D = aa$, $E = 0$ et $F = -1$, ita vt haec aequatio ſit reſoluenda:

$$Ay + \frac{Cu\,dy}{du} + (aa - uu)\frac{ddy}{du^2} = 0,$$

 eritque

eritque $n = \frac{1 + C \pm \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$, cuius valor semper est realis, nisi A sit quantitas negatiua maior quam $\frac{1}{4}(1 + C)^2$: hinc erit

$$m = -n + 1 + \frac{1}{2}C = \frac{1 \mp \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$$

cuius valore positiuo sumta, erit pro resolutione nostrae aequationis

$$y = \frac{1}{n}\int dx (u + x)^n (aa - xx)^{m-1}$$

quod integrale ita capiatur, vt posito $x = a$ euanescat; tum vero statuatur $x = -a$, et pro y prodibit functio ipsius u aequationi satisfaciens. Prout iam fuerit numerus realis, vel imaginarius, sequentia exempla subiungamus.

13. *Exemplum* 1. Sit $C = 2$, et $A = -2$, vt proposita sit haec aequatio:

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = 0.$$

erit $n = 1$, et $m = 1$, vnde fit $y = \int dx(u + x)$ et ob

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = aa - xx$$

integratio ipsius y ita absolui debet, vt pro terminis integralis $aa - xx$ euanescat, hoc est si fuerit $x = a$ et $x = -a$. Fiet ergo $y = ux + \frac{1}{2}xx - au - \frac{1}{2}aa$, et posito iam $x = -a$, erit $y = -2au$, qui valor aequationi vtique satisfacit, et generalius quidem $y = \alpha u$, ex quo porro integrale completum eruitur, ponendo $y = uz$, vnde fit

$$2aadudz + (aa - uu)uddz = 0, \text{ seu } \frac{ddz}{dz} + \frac{2aadu}{u(aa - uu)} = 0$$

vel $\frac{ddz}{dz} + \frac{2du}{u} + \frac{2udu}{aa - uu} = 0$, quae integrata dat

$$\frac{uudz}{aa - uu} = \beta du, \text{ porroque } z = \gamma - \beta u - \frac{\beta aa}{u}$$

consequenter $y = \gamma u - \beta uu - \beta aa$.

ANNO-